الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

اختبار في مادة الرياضيات

لشعبتي الرياضيات و التقني الرياضي

المدة: 4 ساعات

<u>التمرين الأول</u> : العلامة (06 نقاط) .

f الدالة العددية المعرفة على P بالعبارة : $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ ، C_f تمثيل بيانها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،لدينا:
$\sqrt{1+x^2}-x>0$، $\sqrt{1+x^2}+x>0$، $2\sqrt{1+x^2}-x>0$.

2) أ - احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f ؟

ب – احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x)$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f ؟

جـ - ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم D الذي معادلته $y=x$ و بالنسبة إلى المستقيم D' الذي معادلته $y=-3x$.

3) g الدالة المعرفة على P بـ : $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$.

أ - اثبت أن الدالة g متزايدة تماما علىP .

ب – حل فيP المعادلة $g(x)=0$.

جـ - عين إشارة $g(x)$.

4) أ- احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب – بين أنه مهما يكن x من P فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

جـ - شكل جدول تغيرات f .

5) ارسم المستقيمين D و D' والمنحنى C_f .

<u>التمرين الثاني</u> : العلامة (04 نقاط) .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة X المعادلة (E) : $z^2+i\sqrt{3}z-i=0........(E)$

2) ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $[0;\frac{\pi}{2}]$ ، نعتبر في X المعادلة (E') :

$z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0.........(E')$.

أ - تحقق أن : $(\cos\theta+i)^2=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$.

ب – حل في C المعادلة (E') .

3) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$.، نعتبر النقط A و B و C التي لواحقها i ، $\cos\theta+(1-\sin\theta)i$ و $-\cos\theta-(1+\sin\theta)i$ على الترتيب .

أ- عين العدد θ حتى تكون A و B و C على استقامة واحدة .
ب- عين العدد θ حتى تنتمي النقطتان B و C إلى دائرة مركزها النقطة O. ما هو نصف قطر الدائرة ؟

<u>التمرين الثالث</u> : العلامة (03 نقاط) .

I) c_1 و c_2 حجرا نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب c_1 الأعداد : 0، 0، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$ و تحمل

أوجه المكعب c_2 الأعداد : 0، 0، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{2}$.

نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ c_1 و c_2 . نرمز لهذين العددين بـ α و β .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ر مية العدد $\sin(\alpha+\beta)$.

1) ماهي القيم الممكنة للمتغير X ؟ (يمكن إعطاء النتائج في جدول) .
2) عيّن قانون احتمال X .
3) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(x)$ للمتغير العشوائي X .

II) نجري الآن اللعبة الآتية : يربح شخص ما $100\ DA$ عندما يرمي حجري النرد ويتحصل على $\sin(\alpha+\beta)=1$ أو $\sin(\alpha+\beta)=-1$ ، ويخسر $50\ DA$ في باقي الحالات .

1) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة .
1) عيّن قانون احتمال Y .
2) نرمي حجري النرد 5 مرات . ما هو الاحتمال أن يربح اللاعب $300\ DA$ ؟

<u>التمرين الرابع</u> : العلامة (03 نقاط) .

عين في كل حالة مما يلي الإجابة الصحيحة من بين الإجابات أ، ب، ج المقترحة مع التعليل.

	أ	ب	ج
إذا كان $Z=\frac{4-i}{1+2i}$ فإن Z هو العدد المركب	$3-3i$	$\frac{2-9i}{5}$	$\frac{2-9i}{-3}$
مرافق العدد المركب $Z=\frac{1-z}{1+i}$ (حيث $z=x+iy$ مع x و y عددين حقيقيين) هو:	$\frac{1+z}{1-i}$	$\frac{1}{2}\left[1+x-y+i(1+x+y)\right]$	$\frac{1-\overline{z}}{1-i}$
إذا كان $Argz=\frac{\pi}{3}$ و $z'=-5$ فإن:	$Argzz'=\frac{\pi}{3}$	$Argzz'=\frac{4\pi}{3}$	$Argzz'=-\frac{2\pi}{3}$

<u>التمرين الخامس</u> : العلامة (04 نقاط) .

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ المعادلة : $11n-24m=1$**............(1)**

أ- برر أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .
ب- باستخدام خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (1) .
جـ- عين مجموعة حلول المعادلة (1) .

2) أ- بين أن 9 يقسم $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.

ب- بين أنه مهما يكن الحل $(m;n)$ فإن : $9 = (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1)$.

جـ- بين أن : $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11n} - 1$.

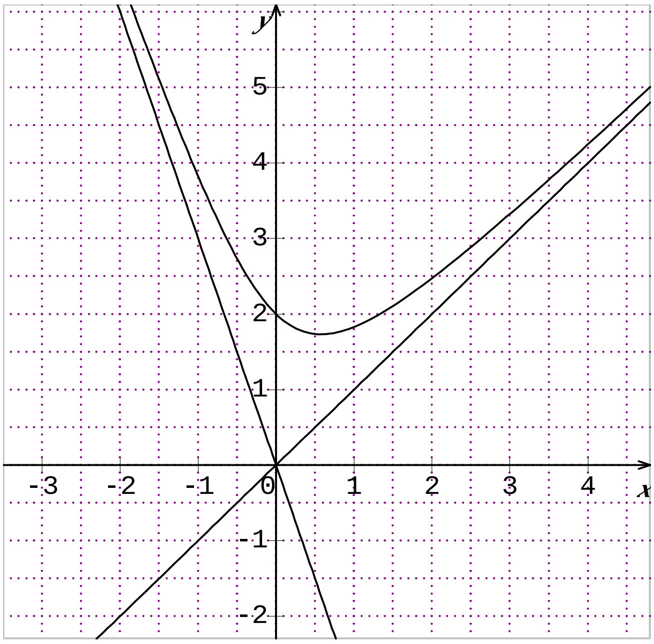
استنتج وجود عددين صحيحين N و M بحيث $(10^{11n} - 1)N - (10^{24m} - 1)M = 9$.

د- بين ان كل قاسم مشترك لـ $10^{24} - 1$ و $10^{11} - 1$ يقسم كذلك 9 .

هـ- استنتج مما سبق $p\,\mathbf{gcd}(10^{11} - 1; 10^{24} - 1)$.

الحل النموذجي و سلم التنقيط لشعبتي الرياضيات و التقني الرياضي

الإجـــابـــــــــــــة	سلم التنقيط
التمرين الأول (06 نقاط)	
1)- من أجل x سالب : $\sqrt{1+x^2}$ موجب و $-x$ موجب مما يؤدي إلى $\sqrt{1+x^2} - x > 0$	0.25
من أجل x موجب : $1 + x^2 > x^2$ نجذر الطرفين $\sqrt{1+x^2} > x$ .... ومنه : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$	0.25
- من أجل x موجب : $\sqrt{1+x^2}$ موجب و x موجب مما يؤدي أن $\sqrt{1+x^2} + x$ موجب	0.25
من أجل x سالب : $1 + x^2 > x^2$ ، نجذر الطرفين $\sqrt{1+x^2} > -x$ .... و منه : $\sqrt{1+x^2} + x > 0$	0.25
- لدينا : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ ، بإضافة العبارة $\sqrt{1+x^2}$ الموجبة تماما إلى طرف الأيسرمن المتراجحة فينتج : $2\sqrt{1+x^2} - x > 0$	0.25
2) أ - $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2(\sqrt{1+x^2} - x)$ .... $\lim\limits_{x\to+\infty}(2(\sqrt{1+x^2} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) = 0$ نستنتج أن المستقيم D الذي معادلته : $y = x$ مقارب مائل C_f .	3×0.25
ب- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2(\sqrt{1+x^2} - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}\right) = 0$ .... نستنتج أن المستقيم D' الذي معادلته : $y = -3x$ مقارب مائل لـ C_f .	2×0.25
جـ - لدراسة الوضعية النسبية ندرس إشارة $f(x) - x$. $f(x) - x = 2(\sqrt{1+x^2} - x)$ ، هذه العبارة موجبة تماما حسب (1) . ... إذن C_f فوق D.	0.25
- $f(x) + x = 2(\sqrt{1+x^2} + x)$ ، هذه العبارة موجبة تماما حسب (1) . ... إذن C_f فوق D'.	0.25.

0.25	3) أ- من أجل كل عدد حقيقي x $g'(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}$
0.25	إشارة الدالة المشتقة من إشارة دالة البسط ، و دالة البسط $2\sqrt{1+x^2}-x$ موجبة تماما ..... إذن الدالة g متزايدة .
2×0.25	ب- $g(x)=0$ معناها $2x-\sqrt{1+x^2}=0$ .... معناها $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
0.5	جـ - إشارة $g(x)$: من أجل $x\geq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ فإن $g(x)\geq 0$ ....
0.25	من أجل $x\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ فإن $g(x)\leq 0$
0.5	4) أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ....
	ب- من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ ....
	جـ. جدول التغيرات ....
	د- الرسم
0.75	 ....

<u>التمرين الثاني</u> : العلامة (04 نقاط) .

1) $\Delta = -3+4i = (1+2i)^2$ .... 2×0.5

$z_1 = \dfrac{1+i(2-\sqrt{3})}{2}; z_2 = \dfrac{-1-i(2+\sqrt{3})}{2}$ .... 2×0.5

2) أ- التحقق : $(\cos\theta + i)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta - 1 = (1-\sin^2\theta) + 2i\cos\theta - 1$ 0.25

$(1-\sin^2\theta) + 2i\cos\theta - 1 = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$ 0.25

ب- $z'_1 = \cos\theta + i(1-\sin\theta); z'_2 = -\cos\theta - i(\sin\theta + 1)$ .... 2×0.25

3) أ - $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 0.5

ب- $\theta = 0$ ، نصف قطر الدائرة : $r = \sqrt{2}$ 0.5

<u>التمرين الثالث</u> : العلامة (03 نقاط) .

I) 1- 0.5

	0	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$4\frac{\pi}{3}$	$4\frac{\pi}{3}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$

(2 0.5

	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

(3 $E(X) = \dfrac{1}{6}$ 0.5

$\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 0.5

II) 1-

x_i	-50	100

0.5

$p(X=x_i)$	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$

0.5

2) نتعرف هنا على الثنائي $p(Y=3)=C_5^3\left(\frac{3}{9}\right)^3\left(\frac{6}{9}\right)^2=\frac{40}{243}$ ....

<u>التمرين الرابع</u> : العلامة (03 نقاط) .

تمنح علامة واحدة لكل إجابة صحيحة مع التعليل.

<u>التمرين الخامس</u> (04 نقط)

) أ- لدينا $p\,\mathbf{gcd}(11;24)=1$ إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u,v بحيث

. $11u+24v=1$

0.25 يكفي أن نضع $n=u$ و $m=v$.

ب- باستخدام خوارزمية إقليدس

$24=11\times 2+2$

$11=2\times 5+1$ ....

إذن :

0.25 $1=11-2\times 5$

$1=11-(24-11\times 2)\times 5$....................................

0.25 $1=11\times 11-24\times 5$

الحل الخاص هو : $(5;11)$..

ج - لدينا $11n-24m=1$

$11\times 11-24\times 5=1$

0.5 بالطرح طرفا من طرف نجد : $11(n-11)-24(m-24)=0$

0.25 $11(n-11)=24(m-24)$

0.25 بتطبيق مبرهنة غوص نجد : $S=\{(11k+5;24k+11);k\in Z\}$ ....

2) أ – لدينا $10\equiv 1[9]$ إذن $10^{11}\equiv 1[9]$ و منه $10^{11}-1\equiv 0[9]$ أي 9 يقسم $10^{11}-1$..........

وبنفس الطريقة نبين أن : 9 يقسم $10^{24}-1$...

ب – بتعويض $24m=11n-1$ في العبارة

025. $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=(10^{11n}-1)-10(10^{11n-1}-1)=10^{11n}-1-10^{11n}+10=9$

ج - حسب الخاصية : $1+x+x^2+...+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1};x\neq 1$ ويوضع $x=10^{11}$ نتحصل على

0.25×2 $10^{11n}-1=(10^{11}-1)(1+10^{11}+(10^{11})^2+...+(10^{11})^{n-1}$.............................

إذن $10^{11}-1$ يقسم $10^{11n}-1$

$N=(1+10^{11}+(10^{11})^2+...+(10^{11})^{n-1}$ و

$M=10(1+10^{24}+(10^{24})^2+...+(10^{24})^{m-1}$...

0.25 د – ليكن d قاسما مشتركا لـ $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$

إذن : $10^{11}-1=k'd$ و $10^{24}-1=k''d$ و حسب (د) وبالتعويض نجد $k'dN-k''dM=9$

إي $d(k'N-k''M)=9$..

ومنه d يقسم 9. هـ - حسب السؤال السابق d يقسم 9 إذن $d \in \{1;3;9\}$ وحسب (أ) لدينا d قاسم مشترك لـ $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ .... إذن : $pgcd(10^{11}-1;10^{24}-1)=9$	0.25 0.5